

TW

**stichting
mathematisch
centrum**



TW

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TD 5/71

MAART

WERKBESPREKINGEN IN 1970

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK
MATHEMATISCH
AMSTERDAM

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud	blz.
N.M. Temme, Asymptotische ontwikkeling van de oplossing van een singulier storingsprobleem.	1
T.H. Koornwinder, Jacobipolynomen en fractionele integratie met singu- lariteiten aan beide uiteinden van het interval.	3
H. Bavinck, Convolutie, gegeneraliseerde translatie en een differentiaaloperator bij Jacobireeksen.	6
H. Bavinck, Fractionele integratie van Jacobireeksen.	9
D.S. Fokkema, Bijzondere oplossingen van de Schrödingervergelijking.	12
T.H. Koornwinder, Jacobipolynomen, vervolg.	16
C.G. van der Laan, Eenstapsmethode.	19
T.M.T. Coolen, Onjuist gestelde problemen.	21
P.J. van der Houwen, Polynoomprobleem.	28
Mevrouw T. Zwaagstra-Eerbeek, Tricomiprobleem.	32
E. Slagt, Differentiemethoden voor symmetrische hyperbolische systemen.	35

Werkbespreking 13 januari 1970,

N.M. Temme.

Asymptotische ontwikkeling van de oplossing van een singulier storingsprobleem.

De asymptotische ontwikkeling van Laplace integralen van de gedaante

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega t} t^{\alpha} f(t) dt,$$

voor $\omega \rightarrow \infty$, (met $f(t)$ analytisch in een omgeving van $t = 0$) die men op de klassieke manier verkrijgt door $f(t)$ in machten van t te ontwikkelen en dan sommatie en integratie te verwisselen, wordt onbruikbaar als $f(t)$ dicht bij $t = 0$ singulier is.

B.L. van der Waerden (1951) heeft een asymptotische ontwikkeling afgeleid voor het geval waarin $f(t)$ een pool van de eerste orde heeft dicht bij $t = 0$ en $\alpha = -\frac{1}{2}$, terwijl F. Oberhettinger (1959) heeft aangegeven hoe het geval wordt behandeld als $f(t)$ een pool van orde n heeft en α willekeurig is met $\operatorname{Re} \alpha > -1$. Naast een asymptotische reeks krijgt Van der Waerden een errorfunctie als extra term en Oberhettinger krijgt n extra termen, die uitgedrukt worden in Whittaker functies.

Het geval waarin $f(t)$ een vertakkingspunt heeft dicht bij de oorsprong wordt door hen niet behandeld, maar kan ook worden opgelost. De gebruikte methode kan toegepast worden bij de asymptotische ontwikkeling voor $\varepsilon \rightarrow 0$ van de oplossing van het volgende randwaardeprobleem, een zogenaamd singulier storingsprobleem:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon \Delta \phi(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y) = 0, & x > 0 \text{ en } y > 0, \\ \text{met randwaarden} \\ \phi(x, 0) = 0 \text{ en } \phi(0, y) = \phi(y) \end{cases}$$

en ε is een positieve parameter.

J. Grasman (1968) heeft de asymptotische ontwikkeling van de oplossing (1) afgeleid o.a. met behulp van de techniek van de singuliere storingsproblemen, terwijl in onze aanpak bovengenoemde, essentieel andere methoden worden gebruikt.

Allereerst zal de oplossing van (1) worden onderzocht voor $\phi(y) = y^{\nu-1}$ met $\operatorname{Re} \nu > 0$, speciaal in de zogenaamde grenslaag. Er wordt voor dit geval een volledige asymptotische ontwikkeling afgeleid bestaande uit grenslaag functies en met behulp van de gevonden resultaten wordt het probleem voor een algemenere randfunctie $\phi(y)$ behandeld.

Literatuur

J. Grasman

Journ. Engin. Math. 2(1968).

F. Oberhettinger

J. Res. Mat. Bur. Stand. 63B(1959)

B.L. van der Waerden

Appl. Sci. Res. 82(1951).

Werkbespreking 27 januari 1970,

T.H. Koornwinder.

Jacobi-polynomen en fractionele integralen met singulariteiten aan beide uiteinden van het interval.

Het uitgangspunt zijn de volgende varianten van Rodrigues' formule:

$$(1) \quad L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} \frac{1}{e^{-x} x^\alpha} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [e^{-x} x^{\alpha+n}].$$

$$(2) \quad L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^\alpha}{n!} \frac{1}{e^{-x}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+n} [e^{-x} x^n], \quad \alpha \text{ geheel } \geq 0.$$

$$(3) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

$$(4) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^{\beta+n} \Gamma(\alpha+n+1)}{2^n \Gamma(\alpha+\beta+n+1) n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\beta+n} [(1-x)^{\alpha+\beta+n} (1+x)^n],$$

$\beta \text{ geheel } \geq 0.$

$$(5) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n+1)}{2^n \Gamma(\alpha+\beta+n+1) n!} \frac{1}{(1+x)^\beta} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+n} [(1-x)^n (1+x)^{\alpha+\beta+n}],$$

$\alpha \text{ geheel } \geq 0.$

$$(6) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^{\beta+n}}{2^n (\alpha+\beta+n)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+\beta+n} [(1-x)^{\beta+n} (1+x)^{\alpha+n}],$$

$\alpha, \beta \text{ geheel } \geq 0.$

(1) en (3) zijn algemeen bekend; (2), (4), (5), (6) schijnen niet bekend te zijn. Het doel is deze nieuwe formules uit te breiden voor het geval dat α en/of β niet geheel zijn.

(2) kan worden uitgebreid als een fractionele integraal van Weyl:

$$(2') \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_y^\infty L_n^\alpha(x) e^{-x} (x-y)^{\alpha+n-1} dx = \frac{(-1)^n}{n!} y^n e^{-y}.$$

(4) en (5) kunnen worden uitgebreid als fractionele integralen van Riemann-Liouville:

$$\begin{aligned}
 (4') \quad & \frac{1}{\Gamma(\beta+n)} \int_y^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (x-y)^{\beta+n-1} dx = \\
 & = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} (1-y)^{\alpha+\beta+n} (1+y)^n.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5') \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_{-1}^y P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1+x)^\beta (y-x)^{\alpha+n-1} dx = \\
 & = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} (1-y)^n (1+y)^{\alpha+\beta+n}.
 \end{aligned}$$

(6) kan verkregen worden uit (3) en een relatie

$$(7) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha+\beta+n)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+\beta} [(1-x)^\beta (1+x)^\alpha P_n^{(\beta, \alpha)}(x)],$$

α, β geheel ≥ 0 .

Zij voor α, β geheel ≥ 0 , $K_{\alpha, \beta}(\xi, x)$ een functie van Green:

$$(i) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha+\beta} K_{\alpha, \beta}(\xi, x) = \delta(\xi-x).$$

$$(ii) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k K_{\alpha, \beta}(\xi, -1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \alpha-1.$$

$$(iii) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k K_{\alpha, \beta}(\xi, 1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \beta-1.$$

Dan is (7) equivalent met:

$$(8) \quad \int_{-1}^{+1} K_{\alpha, \beta}(\xi, x) P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi) d\xi = \frac{(-1)^\beta \Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} (1-x)^\beta (1+x)^\alpha P_n^{(\beta, \alpha)}(x).$$

Voor willekeurig reële vaste α en β wordt de onbekende functie $K_{\alpha, \beta}(\xi, x)$ geheel bepaald door (8) voor $n = 0, 1, 2, \dots$. Na berekening van $K_{\alpha, \beta}(\xi, x)$ is (8) de natuurlijke uitbreiding van (7). Uit (8) volgt:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad K_{\alpha, \beta}(\xi, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{\beta} (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+1) \Gamma(n+1)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)} \right. \\
 &\quad \cdot (1-\xi)^{\alpha} (1+\xi)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi) (1-x)^{\beta} (1+x)^{\alpha} P_n^{(\beta, \alpha)}(x) \left. \right].
 \end{aligned}$$

Ik ben er in geslaagd de som te bepalen in het geval $\alpha = \beta$:

$$\begin{aligned}
 (10) \quad K_{\alpha, \alpha}(\xi, x) &= \frac{(-1)^{\alpha}}{2^{2\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+1)} \frac{(1-\xi^2)^{\alpha} (1-x^2)^{\alpha}}{1-\xi x} \cdot \\
 &\quad \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \alpha+1; \frac{(1-\xi^2)(1-x^2)}{(1-\xi x)^2}\right).
 \end{aligned}$$

Werkbespreking 17 februari 1970,

H. Bavinck.

Convolutie, gegeneraliseerde translatie en een differentiaaloperator bij Jacobi reeksen.

De Jacobi polynomen $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$ zijn orthogonaal op het interval $(0, \pi)$ met betrekking tot de gewichtsfunctie

$$(1) \quad \rho^{(\alpha, \beta)}(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2\beta+1},$$

waarbij

$$(2) \quad [\omega_n^{(\alpha, \beta)}]^{-1} = \int_0^\pi \{P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)\}^2 \rho^{(\alpha, \beta)}(\theta) d\theta = O(n^{-1}).$$

De functies $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$ zijn de eigenfuncties van de differentiaaloperator

$$(3) \quad A_\theta = -(\rho^{(\alpha, \beta)}(\theta))^{-1} \frac{d}{d\theta} \{ \rho^{(\alpha, \beta)}(\theta) \frac{d}{d\theta} \},$$

met randvoorwaarden

$$(4) \quad \frac{d}{d\theta} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = 0, \quad \theta = 0, \theta = \pi,$$

en met eigenwaarden $\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)$.

Aan een functie $f(\cos \theta) \in L_1(0, \pi; \rho^{(\alpha, \beta)}(\theta))$ voegen we een formele Fourier-Jacobi reeks toe

$$(5) \quad f(\cos \theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n^{(\alpha, \beta)} P_n^{(\alpha, \beta)}(1) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta),$$

waarbij

$$(6) \quad a_n = \int_0^\pi f(\cos \theta) \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(1)} \rho^{(\alpha, \beta)}(\theta) d\theta.$$

In navolging van Askey en Wainger introduceren we

$$(7) \quad K_r(\theta, \phi, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \omega_n^{(\alpha, \beta)} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \phi) \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \psi)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(1)}$$

en definiëren we

$$(8) \quad f_r(\cos \theta, \cos \phi) = \int_0^\pi K_r(\theta, \phi, \psi) f(\cos \psi) \rho^{(\alpha, \beta)}(\psi) d\psi.$$

Er kan worden aangetoond dat $f_r(\cos \theta, \cos \phi) \rightarrow f(\cos \theta, \cos \phi)$ als $r \rightarrow 1$ bijna overal en in L_1 .

Dan kan bij 2 L_1 functies $f(\cos \theta)$ en $g(\cos \theta)$ de convolutie worden gedefinieerd als

$$(9) \quad h(\cos \theta) = \int_0^\pi f(\cos \theta, \cos \phi) g(\cos \phi) \rho^{(\alpha, \beta)}(\phi) d\phi.$$

$f(\cos \theta, \cos \phi)$ noemen we de gegeneraliseerde translatie van $f(\cos \theta)$. In het geval dat de differentiaaloperator A_θ van het type (3) is, is het mogelijk een Taylor ontwikkeling op te stellen en de restterm te schatten.

Er geldt

$$(10) \quad \|f(\cos \theta, \cos \phi) - f(\cos \theta)\|_\rho \leq C \phi^2 \|A_\theta f\|_\rho, \quad 1 \leq \rho \leq \infty.$$

De operator A_θ toegepast op (5) levert

$$(11) \quad A_\theta f(\cos \theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n+\alpha+\beta+1) \omega_n^{(\alpha, \beta)} P_n^{(\alpha, \beta)}(1) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta).$$

We zullen in het vervolg Jacobi reeksen van het volgende type

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} (\log n)^\delta \omega_n^{(\alpha, \beta)} P_n^{(\alpha, \beta)}(1) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$$

bestuderen, met name om fractionele integratie te kunnen invoeren.

Wij dienen dan allereerst te weten, wanneer de reeks (12) de Jacobi-reeks van een L_1 functie voorstelt.

Daartoe wordt de volgende voldoende voorwaarde afgeleid:

Stelling

Zij $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$ en ν een geheel getal $> \alpha + \frac{3}{2}$. Zij $a(t)$ een $\nu + 1$ maal continue differentieerbare functie op $[0, \infty)$ en laat $a(t) \rightarrow 0$, als $t \rightarrow \infty$ en

$$\gamma_{n,j} = \max_{n \leq t \leq n+a_\nu} \left[\frac{d^j a(t)}{d t^j} \right],$$

waarbij a_ν een geheel getal is dat alleen van ν afhangt.

Neem nu aan dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{j-1} \gamma_{n,j} < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, \nu.$$

Dan is er een L_1 functie waarvan $a(n)$ de Fourier-Jacobi coëfficiënten zijn.

Werkbespreking 24 februari 1970,

H. Bavinck.

Fractionele integratie van Jacobi reeksen.

Wij zijn geïnteresseerd in reeksen van het type

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \omega_n^{(\alpha, \beta)} P_n^{(\alpha, \beta)}(1) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta).$$

We bewijzen de volgende stelling:

Stelling

Voor $\varepsilon > 0$ definiëren we

$$(13) \quad F_{\varepsilon}(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} e^{-\varepsilon n} \omega_n^{(\alpha, \beta)} P_n^{(\alpha, \beta)}(1) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta).$$

Dan geldt, dat voor $\theta \neq 0$, $F(\cos \theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F_{\varepsilon}(\cos \theta)$ puntsgewijs bestaat.

Bovendien is $F(\cos \theta)$ continu voor $0 < \theta \leq \pi$.

In $\theta = 0$,

$$(14) \quad F(\cos \theta) = \frac{\Gamma(\alpha+1-\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})\Gamma(\alpha+1)} (\sin \frac{\theta}{2})^{\gamma-2\alpha-2} + o(1) + o(\theta^{\gamma-2\alpha-2})$$

$\gamma \neq -2m, m \text{ geheel.}$

Voor $0 < \gamma \leq 2\alpha + 2$ geldt $F(\cos \theta) \in L_1$ en

voor $\gamma > 2\alpha + 2$ is $F(\cos \theta)$ continu op $0 \leq \theta \leq \pi$.

In deze gevallen is

$$F(\cos \theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \omega_n^{(\alpha, \beta)} P_n^{(\alpha, \beta)}(1) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta).$$

Definitie

Zij $f \in L_{\infty}$. Wij zeggen dat $f \in \text{Lip } \tau$ is, ($0 < \tau \leq 2$) als

$$\sup_{0 < \psi < \phi} \|f(\cos \theta, \cos \psi) - f(\cos \theta)\|_{\infty} = o(\phi^{\tau}).$$

Voor $\tau > 2$ kunnen we schrijven $\tau = 2k + \tau_1$ (k geheel ≥ 1 , $0 < \tau_1 \leq 2$) en we zeggen $f \in \text{Lip}(\tau)$ als de differentiaaloperator A_θ , k maal op f losgelaten een functie oplevert die $\in \text{Lip } \tau_1$ is.

Noemen we $g_\sigma(\cos \theta)$ de L_1 functie, zodanig dat

$$(15) \quad g_\sigma(\cos \theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+\alpha+\beta+1)]^{-\sigma/2} \omega_n^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos \theta),$$

dan definiëren we de fractionele integraal van orde σ van de functie $f \in L_1$ door

$$(16) \quad I_\sigma f(\cos \theta) = \int_0^\pi f(\cos \theta, \cos \phi) g_\sigma(\cos \phi) \rho^{(\alpha,\beta)}(\phi) d\phi.$$

Er gelden de volgende eigenschappen.

- 1) De semigroep eigenschap $I_{\sigma_2} (I_{\sigma_1} f(\cos \theta)) = I_{\sigma_1 + \sigma_2} f(\cos \theta)$.
- 2) Als $0 < \sigma, \tau < 2$ en $f \in \text{Lip}(\tau)$ dan $I_\sigma f \in \text{Lip}(\sigma + \tau)$
($\sigma + \tau \neq$ even geheel getal).
- 3) Als $f \in L_q$, $1 < q < \infty$ en $\frac{2\alpha+2}{q} < \sigma < 2 + \frac{2\alpha+2}{q}$, dan
$$I_\sigma f \in \text{Lip} \left(\sigma - \frac{2\alpha+2}{q} \right).$$
- 4) Als $q > 1$, $0 < \sigma < \frac{2\alpha+2}{q}$ en $f \in L_q$, dan $I_\sigma f \in L_r$ met
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{\sigma}{2\alpha+2}.$$

Definieren we de fractionele afgeleide van de orde σ door

$$D_\sigma f = A_\theta I_{2-\sigma} f,$$

dan geldt

- 5) Zij $0 < \sigma < \tau < 2$. Als $f \in \text{Lip}(\tau)$, dan $D_\sigma f \in \text{Lip}(\tau - \sigma)$.

Met behulp van deze eigenschappen kan gemakkelijk worden aangetoond dat als $f \in \text{Lip}(\alpha + \frac{1}{2} + \epsilon)$, f een uniform convergente Jacobi reeks heeft en als $f \in \text{Lip}(\alpha + 1 + \epsilon)$, f een absoluut convergente Jacobi reeks heeft.

Literatuur:

R. Askey and S. Wainger.

A convolution structure for Jacobi series.

Amer. J. of Math. 91(1969), 463-485.

H. Bavinck.

A special class of Jacobi series and some applications.

M.C. report TW116 (1970).

Werkbespreking 3 maart 1970,

D.S. Fokkema.

Gezocht: oplossingen van de drie dimensionale Schrödinger vergelijking

$$(1) \quad \Delta \chi(\vec{x}) + k^2 \chi(\vec{x}) - V(\vec{x}) \chi(\vec{x}) = 0.$$

In het bijzonder oplossingen met asymptotisch gedrag

$$\chi(\vec{x}) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{e^{i|\vec{k}||x|}}{|x|} F(k, \cos \theta) \\ \text{in richting } \theta.$$

Deze oplossingen zijn te interpreteren als een fysisch potentiaal verstrooiingsproces.

Met $V(x)$ bolsymmetrisch is separatie van (1) mogelijk:

$$\chi(\vec{x}) = \frac{\psi(x)}{x} P_1(\cos \theta), \\ \psi''(x) + [k^2 - \frac{1(1+1)}{x^2} - V(x)] \psi(x) = 0.$$

Interessante oplossingen hiervan zijn

$$1^\circ \quad \psi_1 = \phi(\lambda, k, x), \text{ met } \phi(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{1+1},$$

$\phi(\lambda, k, x)$ analytisch voor $\text{Re } \lambda > 0$,

alle k en x .

$$\text{N.B. } \lambda = 1 - \frac{1}{2}.$$

$$2^\circ \quad \psi_2 = f(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ikx},$$

analytisch onder meer voor $\text{Im } k < 0$

alle λ en x .

Definieer $F(\lambda, k) = \text{Wronskiaan} \{f(\lambda, k, x), \phi(\lambda, k, x)\}$.

$F(\lambda, k)$ analytisch in $\text{Im } k < 0, \text{Re } \lambda > 0$.

$$S(\lambda, k) = \frac{F(\lambda, k)}{F(\lambda, -k)} e^{i\pi(\lambda - \frac{1}{2})}, \text{ dit is de z.g. S matrix, meromorf}$$

in $\text{Im } k < 0, \text{Re } \lambda > 0$.

De polen van $S(\lambda, k)$ worden Regge polen genoemd, hier $F(\lambda, -k) = 0$.

Af te leiden is

$$F(k, \cos \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [S(\lambda, k) - 1] P_l(\cos \theta),$$

deze som is echter niet convergent voor $\cos \theta \rightarrow \infty$.

Daarom Sommerfeld-Watson transformatie:

$$F(k, \cos \theta) = \oint_P (2l+1) \frac{S(\lambda, k) - 1}{2ik} \frac{P_l(\cos \theta)}{\sin \pi l} dl,$$

waarbij de contour P om de polen van $\sin \pi l$ loopt, niet om de polen van $S(\lambda, k)$.

Vervorming van de integratieweg maakt het soms mogelijk $F(k, \cos \theta)$ af te schatten m.b.v. een som van residuen van Regge polen.

Werkbespreking 10 maart 1970,

D.S. Fokkema.

Samenvatting van de vorige week.

$$\psi''(x) + \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - V(x) \right] \psi(x) = 0$$

levert particuliere oplossingen $\phi(\lambda, k, x)$ en $f(\lambda, k, x)$ met $W(f, \phi) = F(\lambda, k)$.

Dit geeft de "S matrix": $S(\lambda, k) = \frac{F(\lambda, k)}{F(\lambda, -k)} e^{i\pi(\lambda - \frac{1}{2})}$,

$S(\lambda, k)$ analytisch in $\text{Im } k < 0$, $\text{Re } \lambda > 0$, behalve in de nulpunten van $F(\lambda, -k)$:

Regge polen.

Zekere λ en k bepalen via oplossingen van

(1) een getal $S(\lambda, k)$.

$V(x)$ bepaalt bij variërende λ en k een klasse van differentiaalvergelijkingen type (1) en een meromorfe functie $S(\lambda, k)$.

Afgeleid is de betrekking

$$\phi(\lambda, k, x) = \frac{1}{2ik} [F(\lambda, k) f(\lambda, -k, x) - F(\lambda, -k) f(\lambda, k, x)].$$

Dit geeft asymptotisch gedrag

$$\phi(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2ik} [F(\lambda, k) e^{ikx} - F(\lambda, -k) e^{-ikx}].$$

Indien $\text{Im } k < 0$, dan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(\lambda, k, x) e^{-ikx} = \frac{F(\lambda, k)}{2ik},$$

als $\text{Im } k \geq 0$, dan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(\lambda, k, x) e^{-ikx} = \frac{F(\lambda, k)}{2ik},$$

dan en slechts dan als er een Regge pool is, dus als $F(\lambda, -k) = 0$.

Door deze voorwaarden aan het asymptotisch gedrag van een reeksontwikkeling van $\phi(\lambda, k, x)$ op te leggen kan men proberen tot numerieke berekening van Regge polen te komen.

Werkbespreking 17 maart 1970,

T.H. Koornwinder.

Jacobi polynomen en fractionele integralen met singulariteiten aan beide uiteinden van het interval. II.

Voor α en β geheel ≥ 0 geldt (1) met speciale gevallen (2) en (3).

$$(1) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^{\beta+m}}{2^m} \frac{(n-m)!}{(n+\alpha+\beta)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{m+\alpha+\beta} [(1-x)^{\beta+m} (1+x)^{\alpha+m} P_{n-m}^{(\beta+m, \alpha+m)}(x)],$$

$$(2) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^{\beta+n}}{2^n} \frac{1}{(n+\alpha+\beta)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n+\alpha+\beta} [(1-x)^{\beta+n} (1+x)^{\alpha+n}].$$

$$(3) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^\beta \frac{n!}{(n+\alpha+\beta)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\alpha+\beta} [(1-x)^\beta (1+x)^\alpha P_n^{(\beta, \alpha)}(x)].$$

Gevraagd: een functie $K_{\alpha, \beta}(\xi, x)$ zo dat

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} K_{\alpha, \beta}(\xi, x) P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi) d\xi = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} (1-x)^\beta (1+x)^\alpha P_n^{(\beta, \alpha)}(x),$$

voor alle n bij vaste reële α en β .

Laat voor α, β geheel ≥ 0 $G_{\alpha, \beta}(\xi, x)$ de Greense functie zijn die voldoet aan:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha+\beta} G_{\alpha, \beta}(\xi, x) = \delta(\xi-x)$$

en

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k G_{\alpha, \beta}(\xi, -1) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^l G_{\alpha, \beta}(\xi, 1) = 0 \quad \begin{cases} k = 0, 1, \dots, \alpha-1. \\ l = 0, 1, \dots, \beta-1. \end{cases}$$

Dan is voor α, β geheel ≥ 0 $K_{\alpha, \beta}(\xi, x) = (-1)^\beta G_{\alpha, \beta}(\xi, x)$.

$G_{\alpha, \beta}$ voldoet aan enige symmetrierelaties:

$$(5) \quad G_{\alpha, \beta}(\xi, x) = (-1)^{\alpha+\beta} G_{\beta, \alpha}(-\xi, -x).$$

$$(6) \quad G_{\alpha, \beta}(\xi, x) = (-1)^{\alpha+\beta} G_{\beta, \alpha}(x, \xi).$$

$$(7) \quad G_{\alpha, \beta}(\xi, x) = G_{\alpha, \beta}(-x, -\xi).$$

$G_{\alpha,\beta}$ blijkt er als volgt uit te zien:

$$(8) \quad G_{\alpha,\beta}(\xi, x) =$$

$$x < \xi: \frac{-1}{2^{\alpha+\beta-1}(\alpha+\beta-1)!} \sum_{k=0}^{\beta-1} (-1)^k \binom{\alpha+\beta-1}{k} ((1-x)(1+\xi))^k ((1+x)(1-\xi))^{\alpha+\beta-1-k},$$

$$x > \xi: \frac{+1}{2^{\alpha+\beta-1}(\alpha+\beta-1)!} \sum_{k=\beta}^{\alpha+\beta-1} (-1)^k \binom{\alpha+\beta-1}{k} ((1-x)(1+\xi))^k ((1+x)(1-\xi))^{\alpha+\beta-1-k}.$$

Herschreven als hypergeometrische functie suggereert (8) de volgende vorm voor $K_{\alpha,\beta}$:

$$(9) \quad K_{\alpha,\beta}(\xi, x) =$$

$$x < \xi: \frac{+1}{2^{\alpha+\beta-1}} \frac{((1+x)(1-\xi))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{((1-x)(1+\xi))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} {}_2F_1 \left(1-\beta, 1; 1+\alpha; \frac{(1+x)(1-\xi)}{(1-x)(1+\xi)} \right),$$

$$x > \xi: \frac{+1}{2^{\alpha+\beta-1}} \frac{((1+x)(1-\xi))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{((1-x)(1+\xi))^\beta}{\Gamma(\beta+1)} {}_2F_1 \left(1-\alpha, 1; 1+\beta; \frac{(1-x)(1+\xi)}{(1+x)(1-\xi)} \right).$$

(9) gesubstitueerd in (4) moet (4) waar maken. Om dit in te zien bewijzen we eerst met functietheoretische hulpmiddelen:

$$(10) \quad \int_{-1}^{+1} K_{\alpha,\beta}(\xi, x) \xi^k d\xi = (1+x)^\alpha (1-x)^\beta p(x),$$

waarbij p een polynoom is van graad $\leq k$.

Voor $\alpha = \beta$ is er een kwadratische transformatie mogelijk voor (9):

$$(11) \quad K_{\alpha,\alpha}(\xi, x) = \frac{+1}{2^{2\alpha}} \frac{(1-x^2)^\alpha (1-\xi^2)^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{1-\xi x} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, 1; \alpha+1; \frac{(1-\xi^2)(1-x^2)}{(1-\xi x)^2} \right)$$

Herhaaldelijk toepassing van 'contiguous relations' voor $P_n^{(\alpha,\beta)}$ in (4) geeft de uitbreiding van (1):

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \int_{-1}^{+1} K_{\alpha+k, \beta+m-k}(\xi, x) P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi) d\xi = \\
 & = \frac{(-1)^k}{2m} \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} (1-x)^{\beta+m} (1+x)^{\alpha+m} P_{n-m}^{(\beta+m, \alpha+m)}(x).
 \end{aligned}$$

Werkbespreking 27 oktober 1970,

C.G. van der Laan.

Een stapsmethode van de opl. van de diffusievgl.

$$(1) \quad \begin{cases} U_t = U_{xx} + G(x,t) & , 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T, \\ U(x,t) = U_0(x) & , 0 \leq x \leq 1, t = 0, \\ U(0,t) = \phi(0,t), U(1,t) = \phi(1,t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Discretiseren we dit probleem naar de x-variable dan krijgen we

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{U} = D\tilde{U} + F, \\ \tilde{U}(0) = \begin{pmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ \vdots \\ U_{N-2}(0) \\ U_{N-1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(\xi,0) \\ U(2\xi,0) \\ \dots \\ U((N-2)\xi,0) \\ U((N-1)\xi,0) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dit probleem kunnen we oplossen m.b.v. Runge-Kutta methode. Het nadeel is echter dan dat je een veel te nauwkeurige uitkomst krijgt, omdat de conditie opgelegd door de stabiliteit de bovengrens vormt.

Als men echter zgn. stabiliteitstermen toevoegt dan kan men veel grotere tijdstappen nemen. Bij het uitrekenen heb ik Runge-Kutta 1e orde exact toegepast; het aantal stabiliteitstermen is daarbij gelijk aan n.

Dit leidt dan tot het rekursie schema:

$$(3) \quad \begin{aligned} U_0 &= \tilde{U}(0), \\ U_{k+1} &= \beta_0 U_k + \beta_1 \tau c_k^{(1)} + \beta_2 \tau^2 c_k^{(2)} + \dots + \beta_n \tau^n c_k^{(n)}, \quad \beta_0=1, \beta_1=1, \\ c_k^{(j+1)} &= Dc_k^{(j)} + \frac{d^j}{dt^j} f_k, \quad j = 0, 1, 2, \dots, c_k^{(0)} = U_k. \end{aligned}$$

Dit schema heb ik toegepast op de volgende problemen:

$U(x,t)$	$U(x,0)$	n	$\tau = \tau_{stab}$ methode	$\tau = \min(\tau_{acc}, \tau_{stab})$
$e^{-t}(x-x^{10}) + 1$		1	x	
"		4	x	
"		10	x	
"		10		x
$e^{-t}(x-x^4) + 1$		10	x	
"		10		x
$(1+t)^{-10}(x-x^4) + 1$		10	x	
"		10		x

De resultaten hiervan zijn dat de methode meest efficient is als:

- a) n groot is ,
- b) $\tau = \tau_{stab}$, als de anal. opl. tammer is in t dan in x ,
- c) $\tau = \min(\tau_{acc}, \tau_{stab})$, als " " " " " " x " " t.

Literatuur

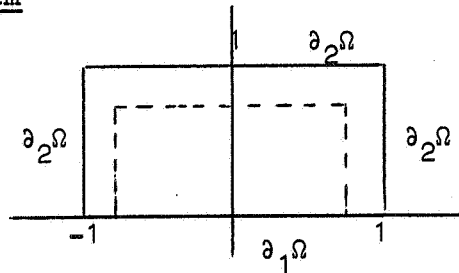
P.J. van der Houwen en C.G. van der Laah,

Numerical solution of the diffusion equation by one step methods,
M.C., TN57/70 (1970).

Werkbespreking 10 november 1970,
T.M.T. Cöolen.

Onjuist gestelde problemen

1. Het Cauchyprobleem



$$\Omega = \{(x,y) \mid -1 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \\ u(x,0) = f(x) \\ u_y(x,0) = g(x) \end{array} \right\} \text{gegeven} \quad \begin{array}{l} f \in H^{\frac{3}{2}}(\partial_1 \Omega), \\ g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial_1 \Omega). \end{array}$$

Dit probleem is niet goed gesteld in de zin van Hadamard. We nemen nu aan dat f en g zodanig zijn dat er een oplossing bestaat, die dan ook uniek is, en concentreren ons erop, dat u bovendien niet continu afhangt van de randvoorwaarden.

2. Methode van de quasi-reversibiliteit (QR)

Bekijk i.p.v. (1) het volgende probleem

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta M_\varepsilon \Delta u_\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega, \\ u_\varepsilon(x,0) = f(x); \quad -1 < x < 1, \quad f \in H^{\frac{3}{2}}(\partial_1 \Omega), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = g(x); \quad -1 < x < 1, \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial_1 \Omega), \end{array} \right.$$

waarin

$$M_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{voor } \text{dist}((x,y), \partial_2 \Omega) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \\ 1 & \text{voor } \text{dist}((x,y), \partial_2 \Omega) \geq 2\varepsilon, \\ & \text{tussen } 0 \text{ en } 1, \text{ en } C^\infty(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

Stelling 1

Het probleem (2) heeft een oplossing $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$, die eenduidig bepaald is, en continu afhangt van f en g in de zin dat de toevoeging

$$(f, g) \rightarrow u_\varepsilon$$

$$\frac{3}{H^2(\partial_1 \Omega)} \times \frac{1}{H^2(\partial_1 \Omega)} \rightarrow H^2(\Omega)$$

continu is. M.a.w. (2) is goed gesteld.

Als geheugensteuntje:

$$H^m(\Omega) = \{u \mid u \in \mathcal{D}'(\Omega), D^p u \in L^2(\Omega) \text{ voor } |p| \leq m\}$$

met inproduct

$$(u, v)_{m, \Omega} = \sum_{|p| \leq m} \int_{\Omega} D^p u \overline{D^p v} \, dx.$$

Stelling 2

Wanneer f en g zodanig zijn, dat (1) een oplossing heeft, dan geldt

$$u_\varepsilon = u \text{ op } \Omega_\varepsilon,$$

als

$$\Omega_2 = \{(x, y) \mid |x| < 1 - \varepsilon, a < y < 1 - \varepsilon\}.$$

3. Methode van stabiliteit

Bekijk i.p.v. (1) voor $\varepsilon > 0$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega, \\ u_\varepsilon|_{\partial_1 \Omega} = f, \quad f \in H^{\frac{3}{2}}(\partial_1 \Omega), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}|_{\partial_1 \Omega} = g, \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial_1 \Omega), \\ \Delta u_\varepsilon|_{\partial_2 \Omega} = \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial \nu}|_{\partial_2 \Omega} = 0. \end{array} \right.$$

Stelling 3

Voor probleem (3) geldt stelling 2 ook.

Stelling 4

Er geldt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon} = u \text{ (in een zekere norm).}$$

4. Heuristiek

Probleem (3) doet ons denken aan een rechthoekige plaat van elasties materiaal, die ingeklemd is aan een zijde (voor $f=g=0$). In zekere zin is de elastiese plaat een "mechanies analogon" van zowel (2) als (3): de onbekende randen worden vrijgelaten. Bovendien verplaatst een storing in de randcondities zich "stabiel" dan bij het membraan het geval is.

5. Literatuur

Colloquium Elliptische Differentiaalvergelijkingen:

deel 1, hoofdstukken 4 en 5 : Functionaalanalytische aanpak van ell.dif.vgl.

deel 2, hoofdstuk 7 : Onjuist gestelde problemen.

M.C. syllabi 9.1 (1969) en 9.2 (1970).

Werkbespreking 17 november 1970,

T.M.T. Coolen.

Onjuist gestelde problemen (vervolg)

6. Discretisatie van het probleem (2), dat het oorspronkelijke Cauchy-probleem "vervangt".

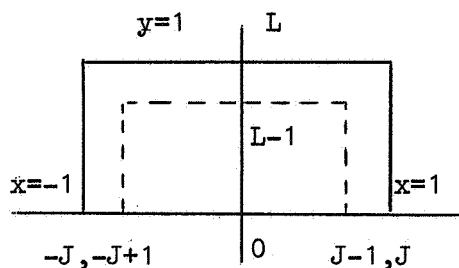


Fig. 2.

Over het gebied wordt een rechthoekig rooster gelegd, zodanig dat de randen door de roosterpunten gaan. De roosterafstand in de x-richting noemen we ξ , in de y-richting η . De Laplace-operator Δ wordt op dit rooster benaderd door de operator D , die in molecuul-notatie gegeven wordt door

$$D = \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & L_1 \\ L_2 & L_4 & L_2 \\ L_1 & L_3 & L_1 \end{bmatrix},$$

waarin

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{1}{2}\xi^{-2} (1+\rho^2-\gamma), \quad \rho = \xi/\eta, \\ L_2 = \xi^{-2} (\gamma-\rho^2), \quad 1 \leq \gamma \leq 2, \\ L_3 = \xi^{-2} (\gamma-1), \\ L_4 = -2\xi^{-2}\gamma, \end{array} \right. \quad (\text{zie Coll. Ell. Diff. vgl. hfdst. 6}).$$

Voor $\gamma = 1+\rho^2$ hebben we de bekende + formule.

M_ε kiezen we zodanig, dat $M_\varepsilon = 1$ in de roosterpunten $(j,1)$ met $-J+1 < j < J-1$, $0 \leq l < L-1$, waarbij $-J$, J , 0 , en L met de rand corresponderen (zie fig. 2), en dat $M_\varepsilon = 0$ in de overige roosterpunten. Het discrete analogon van $\Delta M_\varepsilon \Delta$ wordt dan gegeven door

$$DM_\varepsilon D = \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & L_1 \\ L_2 & L_4 & L_2 \\ L_1 & L_3 & L_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_\varepsilon L_1 & M_\varepsilon L_3 & M_\varepsilon L_1 \\ M_\varepsilon L_2 & M_\varepsilon L_4 & M_\varepsilon L_2 \\ M_\varepsilon L_1 & M_\varepsilon L_3 & M_\varepsilon L_1 \end{bmatrix}.$$

Voor het geval $\gamma = 1+\rho^2$, de + formule, ziet $DM_\varepsilon D$ in een inwendig punt, in een punt met $j = -J+2$, en in een punt met $j = -J+1$ er respectievelijk als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

waar * een element ongelijk aan 0 voorstelt.

7. Directe oplossing van matrix vergelijking

Het gaat erom nu de volgende matrixvergelijking op te lossen

$$(4) \quad DM_\varepsilon Du = h,$$

waarin u en h nu roosterfuncties zijn, en h geconstrueerd is uit de randvoorwaarden f en g .

Voor een niet te groot aantal roosterpunten werd Dekkers procedure detsolbnd gebruikt om het probleem met randvoorwaarde

$f = 0$, $g = \frac{1}{n} \sin nx$ ($n=1, n=5$) op te lossen, wat tot de oplossing

$u = \frac{1}{2} \sin nx \sin hny$ moet leiden. Het resultaat stemde in 2 decimalen

overeen met de analytische oplossing, voor $1 < L-1$, $|j| < J-1$. Voor een beschrijving van detsolbnd zie Dekker, T.J. - ALGOL 60 procedures in numerical algebra, part 1, MC tract 22, 1968.

8. Iteratieve oplossingsmethoden voor (4)

Gezocht werd naar oplossingsmethoden van de vorm

$$(5) \quad u_{k+1} = (1-\omega_k L) u_k + \omega_k h,$$

met $L = DM_\epsilon D$, ω_k nog te kiezen parameters. Van belang zijn kennelijk boven- en ondergrens van de absolute waarde van de operator L .

Het blijkt dat L symmetries is, zodat de eigenwaarden reëel zijn. Een bovengrens is vrij gemakkelijk te vinden m.b.v. de Gerschgorin-maat: vergelijk nl. de sommen van de absolute waarden van de elementen van elke rij uit de bij L behorende matrix, en neem daarvan de grootste. Deze is dan een bovengrens voor de eigenwaarden van L . We vinden

$$(6) \quad \lambda_i = 4L_4^2 \quad \text{voor alle } \lambda_i.$$

9. Ondergrens voor de eigenwaarden van $DM_\epsilon D$

Voor $\xi = \eta = .1$ blijkt experimenteel, volgens een methode beschreven in rapport TW 107 van Van der Houwen, dat de kleinste eigenwaarde dan wel het zwaartepunt van de kleinste eigenwaarden tussen 24 en 33 ligt. De fout $v_k = u - u_k$ (u_k iterand, u exacte oplossing van de differentiaalvergelijking) voldoet aan dezelfde vergelijking als u_k , maar met verdwijnende randvoorwaarden. Als mechanies analogon hiervoor bekijken we de aan een zijde ingeklemde plaat. We vergelijken nu de eigenwaarden van respectievelijk de aan een kant ingeklemde plaat, de opgelegde plaat en het membraan, alle van rechthoekige afmetingen $-1 < x < 1$, $0 < y < 1$. In tabel 1 is λ_1 de kleinste eigenwaarde, λ_M de grootste.

een zijde ingeklemd	opgelegde plaat	membraan
$\lambda_1 \approx 12.5$ $\lambda_2 \approx 16.1$	$\lambda_1 \approx 152.2$	$\lambda_1 \approx 12.33$
$\lambda_M \leq .64_{10}^6$	$\lambda_M \leq .64_{10}^6$	$\lambda_M \leq 800$

Tabel 1

Daar het getal λ_M/λ_1 direct verband houdt met de convergentiesnelheid van de meeste iteratieve methoden van de vorm (5), en wel zo, dat naarmate λ_M/λ_1 groter is, de convergentie langzamer, zien we uit de tabel dat niet alleen λ_M/λ_1 voor ons vierde orde probleem ongeveer het kwadraat is van λ_M/λ_1 voor het membraan, zoals wel te verwachten was, maar dat λ_M/λ_1 zelfs nog groter is dan de speciale randvoorwaarden, zie tabel 2.

	λ_M/λ_1
membraan	67
opgelegde plaat	4260
aan een zijde ingeklemde plaat	53600

Tabel 2

Een verklaring voor de kleine eigenwaarden van $DM_e D$ lijkt hiermee gegeven te zijn. Een groot probleem is nu dat de eigenwaarden aan het begin van het interval (λ_1, λ_M) zo dicht op elkaar liggen ($\lambda_2 \approx 16.1$).

Werkbespreking 24 november 1970,

P.J. van der Houwen.

1° Probleemstelling

$$P_n(x); \frac{d^j}{dx^j} P_n(x) \Big|_{x=0} = 1, j = 0, 1, \dots, p;$$

$$\|P_n(x)\|_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\int_{-\beta(n)}^0 |P_n(x)|^m dx \right]^{\frac{1}{m}} : \text{minimaal en} \\ \beta(n) \text{ maximaal.}$$

2° "Equivalente" probleemstelling

$$\begin{cases} P_n(x) = [1+x+\frac{1}{2!}x^2+\dots+\frac{1}{p!}x^p] + x^{p+1} B_q(x), n = p+q+1, \\ P_n(x) \text{ heeft } q+1 \text{ alternerende raakpunten } x_j \text{ aan } y = \pm 1 \text{ op} \\ [-\beta(n), 0]. \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} P_n(x_j) = (-1)^{n-q-1+j} \\ P'(x_j) = 0 \end{cases}, j = 1, 2, \dots, q+1.$$

3° Toepassing in differentieschema's

Schema's van de orde p met optimale stabiliteit als Jacobiaan negatieve eigenwaarden heeft; efficiëntie evenredig met $\beta(n)/n$.

4° Oplossing $p = 1$

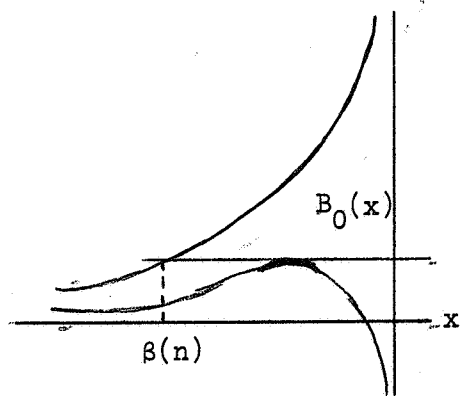
$$P_n(x) = T_n\left(1+\frac{x}{n}\right), \beta(n) = 2n^2.$$

5° Grenzen van Rivlin voor $p > 1$

$$\xi(n-1) \leq \beta(n) \leq 2n^2, \xi e^{1+\xi} = 1 \rightarrow .2 < \xi < .3.$$

6° Oplossingen voor $q = 0$ en $q \neq 1$

$$P_n(x) = A_p(x) + x^{p+1} B_q(x) \rightarrow l_p(x) \leq B_q(x) \leq r_p(x), -\beta(n) \leq x \leq 0.$$



Resultaten in tabel

7° Oplossingen m.b.v. Taylor-ontwikkelingen voor $-\frac{A_p(x)}{x^{p+1}}$

Uitgevoerd voor $p = 2$ en $p = 3$, $q \gg 1$.

8° Oplossing van stelsel (*) voor $q \leq p$

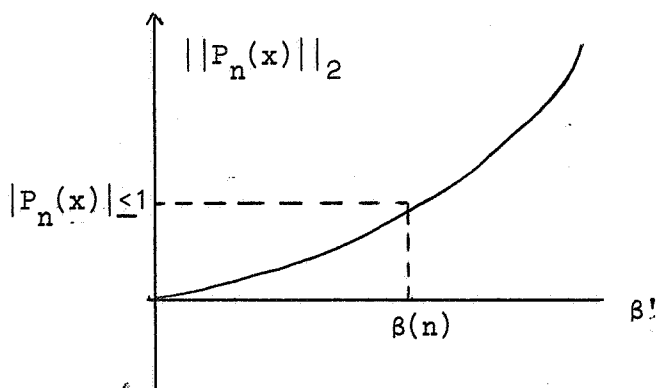
Startwaarden voor x_j en β_j nodig.

Moeilijkheden als $q > p$.

9° Beginapproximaties d.m.v. kwadraat-norm-oplossingen.

Kies een negatieve waarde $-\beta'$ en minimaliseer $\int_{-\beta'}^0 w(x) P_n^2(x) dx$ voor gegeven (n, p) .

Als de oplossing $P_n(x)$ op $[-\beta', 0]$ waarden buiten $[-1, 1]$ heeft, verlaag dan β' anders verhogen.



"Op de grens" van verlagen/verhogen wordt $\beta(n)$ bereikt.

Twee methoden:

Directe methode

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} \int_{-\beta}^0 w(x) P_n^2(x) dx = 0, j = p+1, \dots, n,$$

geeft slecht: geconditioneerde matrixvergelijking van orde n.

Indirecte methode

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i\left(\frac{2}{\beta} x + 1\right), \{P_i\} \text{ orthogonaal t.o.v. } w(x) \text{ op } [-1, +1].$$

Minimaliseren met nevenvoorwaarden geeft matrixvergelijking van orde p+1.

Resultaten met Jacobi polynomen in tabel.

10° Oplossing van stelsel (*) voor $q \leq 10$

De indirecte methode levert voldoende nauwkeurige begin approximaties op maar het programma staakt voor $q > 10$.

Tabel van $\beta(n)/n$ waardenp = 1

n	exacte waarde
n	2n

p = 2

n	Rivlin	Taylor	in $ _2$ norm (α, β) = $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	J. Kok	Opmerkingen
2				1	Gewone Runge-Kutta.
3		1.993	.69n	2.09 = .69n	Met de hand te vinden.
4	$\beta(n)/n$	2.499	.73n	3.0 = .75n	Met de hand te vinden.
5	$> \xi(1 - \frac{1}{n})$	2.855	.74n	3.8 = .77n	
6		3.127	.73n	4.7 = .79n	
7		3.345	.73n	5.6 = .80n	
8		3.523	.73n	6.4 = .80n	
9		3.676	.72n	7.2 = .80n	
10		3.807	.72n	8.1 = .81n	
$n \rightarrow \infty$		5.844	$\sim .7 n$		Blijkbaar is $\beta(n) \sim cn^2$. Voor c is dus 1 meting nodig.

p = 3

n	Rivlin	Taylor	in $ _2$ norm (α, β) = $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	J. Kok	Opmerkingen
3				.85	Gewone Runge-Kutta.
4		niet	.37n	1.50 = .38n	Met de hand te vinden.
5		uitge-	.41n	2.10 = .42n	
6	$\beta(n)/n$	rekend	.43n	2.67 = .45n	
7	$> \xi(1 - \frac{1}{n})$		.43n	3.22 = .46n	
8			.44n	3.76 = .47n	
9			.44n	4.28 = .47n	
10			.45n	4.81 = .48n	
$n \rightarrow \infty$		5.2			

Werkbespreking 1 december 1970,
Mevrouw T. Zwaagstra-Eerbeek.

(1) Tricomivergelijking:

$$yu_{xx} + u_{yy} = f \quad \begin{cases} y > 0 & \text{ell.} \\ y = 0 & \text{par.} \\ y < 0 & \text{hyp.} \end{cases}$$

Karakteristieken:

$$\xi(x,y) = x + \frac{2}{3} (-y)^{3/2}.$$

$$\eta(x,y) = x - \frac{2}{3} (-y)^{3/2}.$$

Roosterparameters

$$\begin{cases} h = x_n - x_{n-1} \\ l_m = y_m - y_{m-1} \end{cases}$$

(2) Er geldt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - l_m l_{m+1} y_m) = 0.$$

Differentie formules van Fillippov:

(3) Ell. gebied:

$$\begin{aligned} & \frac{y_m}{h^2} \{u[n+1,m] + u[n-1,m]\} \\ & + \frac{2}{l_m + l_{m+1}} \left\{ \frac{1}{l_{m+1}} u[n,m+1] + \frac{1}{l_m} u[n,m-1] \right\} \\ & - 2 \left\{ \frac{y_m}{h^2} + \frac{1}{l_m l_{m+1}} \right\} u[n,m] = f(n,m). \end{aligned}$$

(4) Parabolische lijn:

$$\frac{1}{(y_j)^2} \{u[n,j] - 2u[n,0] + u[n,-j]\} = f(n,0)$$

$$j = \begin{cases} 1, & n \text{ oneven.} \\ 2, & n \text{ even.} \end{cases}$$

(5) Hyp. gebied:

$$-\frac{1}{1_m 1_{m+1}} \{u[n+1,m] + u[n-1,m]\}$$

$$+ \frac{2}{1_m 1_{m+1}} \left\{ \frac{1}{1_m} u[n,m+1] + \frac{1}{1_{m+1}} u[n,m-1] \right\} = f(n,m).$$

Matrixvergl. $Au = f$

$$A = C-E-F \begin{cases} C \text{ diagonaal elementen,} \\ E \text{ onderdriehoekselementen,} \\ F \text{ bovendriehoekselementen.} \end{cases}$$

Definitie v.d. S.O.R. methode:

$$(6) \quad u_{k+1} = [1 - \Omega(1 - \Omega C^{-1}E)^{-1}C^{-1}A] u_k + \Omega(1 - \Omega C^{-1}E)^{-1}C^{-1}f,$$

Ω relaxatiefactor, $0 < \Omega < 2$.

Maat voor de convergentiesnelheid:

$$(7) \quad R(k) = -\frac{1}{k} \ln \frac{||Au_k - f||}{||Au_0 - f||}.$$

Volgens Young:

$$(8) \quad \Omega_{\text{opt}} = 1 + \left\{ \frac{\sigma}{1 + (1 - \sigma^2)^{1/2}} \right\}^2,$$

$$\sigma = 1 - 7.29 h^2.$$

Resultaten.

Experimenteel:

$$h = \frac{1}{12} \quad \Omega_{\text{opt}} = 1.5 \quad ,$$

$$h = \frac{1}{24} \quad \Omega_{\text{opt}} = 1.72 - 1.74 \quad ,$$

$$h = \frac{1}{30} \quad \Omega_{\text{opt}} = 1.78 \quad .$$

m.b.v. (8):

$$h = \frac{1}{12} \quad \Omega_{\text{opt}} = 1.52 \quad ,$$

$$h = \frac{1}{24} \quad \Omega_{\text{opt}} = 1.72 \quad ,$$

$$h = \frac{1}{30} \quad \Omega_{\text{opt}} = 1.78 \quad .$$

Werkbespreking 8 december 1970,

E. Slagt.

We beschouwen:

$$(1) \quad \begin{cases} \vec{u}_t + A\vec{u}_x = l\vec{u}, \\ \vec{u}_0 = \phi(x). \end{cases}$$

$$(2) \quad \vec{U}_t + T\vec{U}_x = l\vec{U}.$$

$$(3) \quad LU \equiv u_t + au_x - lu = 0.$$

$$u_j^n = u(n\tau, jh), \quad \tau = \Delta t, \quad h = \Delta x.$$

Differentieschema: (expl.)

$$(4) \quad RU \equiv u^{n+1} - c(\tau) u^n = 0, \quad h = g(\tau).$$

Consistentie:

$$(5) \quad ||RU-LU|| = O(\tau^p), \text{ als } \tau \rightarrow 0.$$

Stabiliteit :

$$(6) \quad |\lambda_i| \leq 1 + O(\tau), \quad \forall k.$$

λ_i eigenwaarde van $G(\tau, k)$ versterkingsmatrix.

Schema's :

expl: Leap-frog: (l=0)

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2h} = 0, \\ e = O(\tau^2) + O(h^2), \\ \left| \frac{a\tau}{h} \right| \leq 1. \end{cases}$$

Friedrichs:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\tau} + a \frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2h} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n), \\ e = O(\tau) + O(h^2), \\ \left| \frac{a\tau}{h} \right| \leq 1. \end{cases}$$

impl Crank-Nicholson:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} = \frac{1}{2}(u_j^{n+1} + u_j^n), \\ e = O(\tau^2) + O(h^2), \\ \text{onvoorwaardelijk stabiel.} \end{cases} \quad [1]$$

Voortplantingsfactor:

$$(10) \quad T(kh) = \frac{e^{i(\beta't + kx)}}{e^{i(\beta t + kx)}} \text{ voor } x = 1 = \frac{2\pi}{k} e t = T = \frac{2\pi}{\text{Re}(\beta)}. \quad [2]$$

Polynomenmethode:

$$(11) \quad \vec{u}_t = D\vec{U} \text{ met bv. } D \equiv -a \frac{(E_+ - E_-)}{2h}, \quad [3]$$

$$\delta = -\frac{ai}{h} \sin(kh) \quad (\text{zuiver imaginair}),$$

$$\tau \leq \frac{\beta(n)}{\sigma(D)} = \frac{\beta(n)h}{|a|}.$$

- [1] Richtmeyer & Morton.
Difference methods for initial value problems,
Interscience, 1967.
- [2] J.J. Leendertse.
Aspects of a computational model for large-period
water-wave propagation, Rand Corporation, 1957.
- [3] P.J. van der Houwen.
One step methods for linear initial value problems
polynomial methods, TW119 (1970).

